M.S-5

शुल्बप्रमेय और पाईथागोरस

प्रो. रमेश चन्द्र दाश शर्मा
आचार्य एवं अध्यक्ष वेद विभाग
श्रीलालबहादुर शास्त्री राष्ट्रिय संस्कृत विद्यापीठ
मानित विश्वविद्यालय
नई दिल्ली–110016

शुल्ब सूत्रों का परिचय

वैदिक साहित्य में कल्पसूत्रों के अन्तर्गत शुल्बसूत्रों की गणना होती है। प्रत्येक वेद के साथ
1. श्रौतसूत्र 2. स्मार्तसूत्र 3. शुल्बसूत्र 4. धर्मसूत्र ये चारप्रकार के सूत्रग्रन्थ होते हैं इस प्रकार लेख कतिपय ग्रन्थों में देखने को मिलता है। परन्तु जब–

ऋचान्त्वः पोषमास्ते पुपुष्वान् गायत्रन्त्वो गायति शक्वरीषु।
ब्रह्मात्वो वदति जातविद्यां **यज्ञस्य मात्रां विमिमीत उत्वः**।।(ऋ.10.71.11.)

ऋत्विक् कर्म विभाजक इस मन्त्र के अर्थ को विचार किया जाता है तो अन्तिम पाद का अर्थ बहुत प्रासंगिक हो जाता है। इष्टि याग में अध्वर्यु स्फ्या लेकर **प्रथमः द्वितीयःतृतीयः** इ स प्रकर कहते हुए वेदी को नापता है। अध्वर्युः कर्मसु वेदयोगात् (का.श्रौ.सू.1.8. 9)सूत्रानुसार यजुर्वेदाध्यायी अध्वर्यु यजुर्वेदीय कर्मानुष्ठान करने के लिये अधिकृत होताहै। इस लिये यज्ञीय समस्त विहरण कार्य अध्वर्युकतृक हैं यह वात श्रुतिवाक्या से तथा सूत्र वाक्या से सिद्ध हो जाती हैं। वर्तमान समुपलब्ध–कात्यायन, बौधायन, आपतम्ब, मैत्रा य ण ा, मानव, बाराह, बाधूल, मशक, हिरण्यकेशी, ये सभी शुल्बसूत्र यजुर्वेद से ही संबद्ध हैं। जब तक अन्य वेदों से सम्बन्धित शुल्बसूत्र नहीं मिल जाते हैं, तब तक प्रतिवेदसम्बद्ध सूत्रचतुष्टय सिद्धान्त स्वीकार करना कठिन होगा।

ब्राह्मण ग्रन्थों में वर्णित यागप्रयोगों को क्रमबद्ध कर ऋषिओं ने श्रौत सूत्रों की रचना की। श्रौत सूत्रों में प्रतिपादित यागा भूत कुण्ड मण्डप वेदी इष्टका आदि के निर्माण हेतु शुल्ब सूत्रों की रचना हुई। **कुण्ड मण्डप आदि के रचना में आने वाली कुछ मूलभूत क्रियाकलापों को आचार्योंने एक सिद्धान्त का रूप दिया, जिन को हम शुल्ब प्रमेय के रूप से जानते हैं ।** पाश्चात्त्य गवेषक पाईथागोरस के नाम से कहे जाने वाले प्रमेय वस्तुतः हमारे ब्राह्मणग्रन्थों में वर्णित वेदी इष्टका निर्माण प्रक्रियाओं के अन्तर्गत ही निहित है । जिन को शुल्ब सूत्र प्रणेता ऋषिओंने अपने अप्रतिम प्रतिभा से प्रत्यक्ष कर शुल्ब ग्रन्थों में सूत्र रूप में सूत्रित किया। इस लिये उपजीवक पाईथागोरस प्रमेय उपजीव्य शुल्बप्रमेयो से बहुत अर्वाचीन है। इस तथ्य को सिद्ध करने के लिए ही हमारा यह उपक्रम है।

शुल्ब शब्दार्थ

मानार्थक'शुल्ब'धातु से शुल्बशब्द निष्पन्न होता है। कोषानुसार शुल्बशब्द रस्सी का वाचक है, क्यों कि यज्ञीय कुण्ड मण्डप संरचना अधिकतर रस्सी से ही की जाती है। अतः महर्षिकात्यायनने ग्रन्थारम्भ में प्रथमसूत्र 'रज्जुसमासं वक्ष्यामः'प्रणयन किया। रस्सी द्वारा क्षेत्रों का योग विभाग करना इस शास्त्र की मुख्य प्रक्रिया है। यहां समास शब्द व्यास का भी उपलक्षक है। **रस्सी द्वारा क्षेत्रों का योग विभाग जहां सूत्रों से कहा जाताहै उस को शुल्बसूत्र कहते हैं।**

काल समीक्षा

अपौरुषेय वेदों के सम्बन्ध में आधुनिक काल समीक्षक ई0पू0 3000 वर्ष वेदों का रचना काल मानते हैं, और ई0पू0 2000–2500 वर्ष ब्रह्मणग्रन्थों का काल मानते हैं। पाईथागोरस का समय ई0पू0 300–500 मानते हैं। व्याकरण सूत्रों के प्रणेता महर्षि पाणिनि का प्रादुर्भाव

Vijnana Bharati

ई0पू01000माना जाता है। पाणिनि के समकालीन महर्षि कात्या यन को माना जाता है। आपस्तम्ब तथा बौधायन ई0पू0 600–800 के बीच माना जाता है। इस प्रकार कुछ आंकडों के आधार पर की गई काल गणना से भी पाईथागोरस से पूर्ववर्ति शुल्बसूत्रकार कात्यायन बौधायन आपस्तम्ब आदि ठहरते हैं। एन.सी.ई.आर. टी.द्वारा प्रकाशित कक्षा 7 गणित पुस्तक की पृष्ठ सं 253 में कालसमीक्षा के सम्बन्ध में लिखा गया है कि–

"प्रसिद्ध यूनानी दार्शनिक पाईथागोरस का जन्म ई.पू. 572 तथा मृत्यु ई. पू. 501 में हुई। यह माना जाता है कि सर्व प्रथम इस प्रमेय का सत्यापन पाईथागोरस ने ही किया। इस लिए इस प्रमेय को पाईथागोरस प्रमेय के नाम से जाना जाता है। लेकिन जो प्रमाण उप लब्ध हैं उन से इस विषय में काफी सन्देह उत्पन्न होते हैं। यह निश्चित है कि प्रमेय अ ौ र इस का सत्यापन यूक्लिडने 300 ई.पू. अपने प्रसिद्ध ग्रन्थ दी एलिमेन्टस् में दिया था।

यह प्रमेय विशेष आंकिक उदाहरणों के रूप में बेवीलोन के निवासिओं और मिश्र वासि यों के 2000ई.पू. ज्ञात थी। भारतवर्ष में इस प्रमेय को लोग पाईथागोरस से बहुत पहले जानते थे। तथा कदाचित् उन्होंने इस का सत्यापन भी किया होगा। 800ई.पू. बौधायन नामक भारतीय गणितज्ञने इस प्रमेय को अत्यन्त सामान्य रूप में तथा आंकिक उदाहरणों द्वारा इसे स्पष्ट किया।"

मैने पहले ही बता दिया है कि शुल्बसूत्रों के मौलिक तथ्य ब्राह्मण ग्रन्थों में पर्याप्त मात्रा से उपलब्ध है। इस बात को प्रमाणित करने के लिये (**वेदमूलकं शुल्बसूत्रम्**) लघुशोध लेख के माध्यम से एक छोटा सा प्रयास किया है। कुछ सूत्रकार तो साक्षात् श्रुतिवाक्या को ही सूत्र रूप में रख दिये है। इन सभी प्रबल प्रमाणों को अवलोकन करने से यह सिद्ध हो जाता है कि शुल्बसूत्रों का प्रतिपाद्य विषय पहले से ही वेदों में स्पन्दित था।पाईथागोरस द्वारा प्रतिपादित प्रमेय हम भारतवासिओं के लिये कोई नवीन तथ्य नही है, किन्तु नितान्त अर्वाचीन है। आज भी हम पाईथागोरस थियोरम के रूप में ही पढते हैं यह एक बिडम्बना है। **वास्तव में ये प्रमेय पाईथागोरस प्रमेय नहीं हैं किन्तु शुल्बप्रमेय हैं।**

प्रमेय मीमांसा

यद्यपि गणित मुख्यतः व्यक्त तथा अव्यक्त के रूप में दो भाग में विभक्त है , फिर भी व्यावहारिक दृष्टि से अंकगणित , रेखागणित तथा बीजगणित के रूप में तीन भाग मे बांटा गया है। गणित से सम्बधित सभी समस्याओं का निराकरण इन्ही तीन विधाओं से किया जाता है।

शुल्बसूत्र रेखा गणित का मूल रूप से उदभव स्थान है। परवर्ति काल में जौतिष शास्त्र के आर्यभट्ट, वराहमिहिर, ब्रह्मगुप्त, भाष्करादि आचार्योंने इस को और विकसित किया। समय की मांग के अनुसार हर साहित्य का विकास होता आ रहा है। इस प्रकार प्रत्येक सूत्र ग्रन्थ एवं अन्य ग्रन्थों का भाष्य टीका टिप्पणी आदि से सम्वर्धन हुआ है। इस क्रम में रेखा गणित का भी आज विकास हुआ है। शुल्बसूत्र में रेखा गणित के बहुत कुछ मूलभूत सिद्धान्त पाये जाते हैं। प्रकाशित कात्यायन आपस्तम्ब बौधायन शुल्बसूत्रों को छोड कर वाकी सभी के नाम ही पढने को मिलते हैं परन्तु ग्रन्थ उपलब्ध नहीं हो पा रहे हैं ये हमारा दुर्भाग्य है।

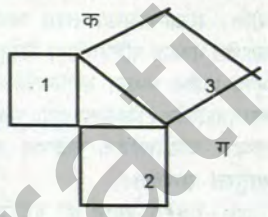
शुल्बसूत्रों में जो प्रमेय दिये गये हैं, उन्ही सिद्धान्तों के आधार पर आधुनिक विचारकोंने अनेक प्रमेय और उप प्रमेय निर्माण किये हैं, उन सवों की आगे चर्चा करेंगे। सव से पहले पाईथागोरस के उस प्रसिद्ध प्रमेय पर विचार करेंगे जिस से यह स्पष्ट हो जाय कि पाईथागोरस प्रमेय और शुल्बप्रमेय में कोई अन्तर है या अविकल वही है। इसके लिये हम सब से पहले शुल्ब सूत्र को ही लेते हैं।

शुल्ब प्रमेय

पदं तिर्यङ्मानी त्रिपदा पार्श्वमानी तस्याक्ष्णया रज्जुर्दशकरणी।। (का.शु.सू.2/6)

अर्थ– यदि तिर्यङ्मानी (तिरच्छी खींची जाने वाली) रस्सी एक पाद की हो और पार्श्व मानी (बगल में खींची जाने वाली) रस्सी तीन पाद की हो तो उन दोनों की कर्ण रस्सी दश पद क्षेत्र वनाने वाली होती है। अथवा यों कहें –भुजवर्ग + कोटीवर्ग = कर्णवर्ग।

इसी सूत्र के अर्थानुसार ही पाईथागोरस प्रमेय बना है।



चित्र –1 वर्ग + 2वर्ग = 3 वर्ग, क ग कर्ण से निर्मित 3 चित्र

पाईथागोरस प्रमेय

- एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग फल के बरावर होता है। (गणित भा.2 कक्षा10 एन.सी.ई.आर.टी.प्रकाशन. पृष्ठ.सं.136)
- दो भुजाओं के मान ज्ञात हो तो तृतीय का ज्ञान के तरीके को पाईथागोरस प्रमेय कहते हैं। (ग.भा.2,कक्षा 7 दिल्ली.शि.वि.प्रकाशन.पृ–256)
- समकोण त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाईयों के बीच इस अदभुत सम्बन्ध ों को प्रायः पाईथागोरस प्रमेय के नाम से जाना जाता है। (कक्षा 7 पृ 253 दिल्ली.शि.वि.)
- किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बरावर होता है। (कक्षा 7 दिल्ली. शि. वि.256)
- यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा का वर्ग उसकी अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बरावर होता हो तो त्रिभुज की इस भुजा का सम्मुख कोण समकोण होता है।

(दिल्ली. शि. वि. कक्षा 7 गणित भा.2.पृ.236)

इस से सम्बन्धित एक और शुल्बप्रमेय

दीर्घचतुरस्रस्याक्ष्णयारज्जुस्तिर्यङ्मानी पार्श्वमानी च यत् पृथग् भूते कुरुत स्तदुभयं करोतीति क्षेत्रज्ञानम्।। (का.शु.सू.2/11)

अर्थ– दीर्घचतुस्र (आयताकार क्षेत्र) के तिर्यङ्मानी और पार्श्वमानी से जो अलग अलग दो क्षेत्र बनेंगे, उन दोनों का संयुक्त क्षेत्रफल को उस के अक्ष्णया (कर्ण) रस्सी निर्माणकर देती है। इस प्रकार बौधायन और आपस्तम्बने भी सूत्र लिखा है।

शुल्ब प्रमेय (द्विकरणी साधन)

समचतुरस्रस्याक्ष्णयारज्जुर्द्विकरणी ।। (का.शु.सू.2/12)

1–चित्र की वर्गक्षेत्र का कर्ण

त ग है। त ग कर्ण से वना वर्ग तह क्षेत्र उस का द्विगुणित क्षेत्र फल प्रतिपादक है। इस प्रकार 2 चित्र का ह दग कर्ण भी आयत का दद्विगुणित क्षेत्रफल को वनाता है।

अर्थ–समचतुस्र की कर्ण रस्सी उस के द्विगुणित क्षेत्र फल को प्रतिपादन करती है। इस ुल्बप्रमेय के उपजीवक आधुनिक विचारकों के ये प्रमेय हैं–

- समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं। (कक्षा–7. दिल्ली.शि.प्रका.गणितभा.2,पृ.सं.308)
- समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बरावर होते हैं। (कक्षा7 ग.भा.–2पृ.303 दि.प्र)

Vijnana Bharati

• जिस समान्तर चतुर्भुज में आसन्नभुजाएँ बराबर हों उसे समचतुर्भुज कहते हैं। (कक्षा 7 ग.भा.–2 पृ. 312)

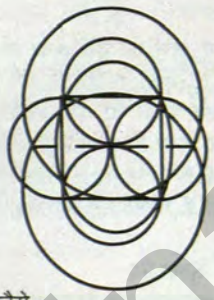
समचतुरस्र निर्माण तथा रेखा समद्विभाग

महर्षि कात्यायनने निर०छन से चतुरस्र निर्माण विधि को पहले कहा है । किन्तु बौधायनने सात वृत्तों से चतुरस्र निर्माण विधि को वताया है। सात वृत्तों से अभीष्ट वर्गक्षेत्र निर्माण के साथ **एक सरल रेखा की समद्विभाग प्रक्रिया भी निष्पन्न हो जाती है।**

चतुरस्रं चिकीर्षन् यावच्चिकीर्षेत् तावतीं रज्जुमुभयतःपाशां कृत्वा मध्ये लक्षणं करोति। लेखामालिख्य तस्य मध्ये शंकुं निहन्यात्। तस्मिन् पाशौ प्रतिमुच्य लक्षणेन मण्डलं परिलिखेत्। विस्कम्मान्तयोः शंकू निहन्यात्। पूर्वस्मिन् पाशं प्रतिमुच्य पाशेन मण्डलं परिलिखेदेवमपरस्मिन् । ते यत्र समेयातां तेन द्वितीयं विष्कम्ममायच्छेत्। विष्कम्मान्तयोः शंकू निहन्यात्। पूर्वस्मिन् पाशौ प्रतिमुच्य लक्षणेन मण्डलं परिलिखेदेवं दक्षिणत एवं पश्चादेवमुत्तरतस्तेषां येऽन्त्याः संसर्गास्तच्चतुरस्रं सम्पद्येत।। (बौ.शु.सू.1/20–23)

अर्थ–चतुरस्र वनाने की इच्छुक जितना बडा चतुरस्र वनाना चाहता है उतनी बडी रस्सी लेकर दोनो तरफ फांस लगा कर मध्य में चिन्ह कर दे। अभीष्ट चतुरस्र के प्रमाण से जमीन पर एक रेखा खींच कर उसके मध्य में कील गाड दे। उस में एक पाश फंसा कर मध्य चिन्ह से वृत्त वनावे। वृत्तपरिधि को स्पर्श करता हुआ (रेखा के दोनो प्रान्त में)मध्य कील से समान

दूरी पर दो कील गाड दे। पूर्वदिशा की कील पर पाश फंसा कर एक बडा वृत्त वनावे। इस प्रकार पश्चिम क़े तरफ भी वनावे। वे दोनों जहां प्रतिच्छेद करते हैं वहां से एक रेखा से जोड कर, मध्य कील से उत्तर तथा दक्षिण के तरफ समान दूरी पर दो कील गाड दे। मध्य चिन्ह रस्सी से पूर्व, पश्चिम, उत्तर, दक्षिण, कीलों से चार वृत्त वनावे। उनके जहां (फूल के समान) अन्तिम संसर्ग, उन को रेखा द्वारा जोडने से अभीष्ट समचतुरस्र सम्पन्न हो जाता है।



जैसे–

यहाँ प स प्रमाण रेखा को क ख मध्य रेखा विभाजित करती है। सात वृत्तों से निर्मित वर्गक्षेत्र ह म च न जो अभीष्ट प्रमाण स प प्रमाण से वर्गीकृत है।

एक सरल रेखा को समद्विभाग करने की प्रक्रिया को यूक्लीद्ने पचास वर्ष अनुसन्धन करने के पश्चात् प्राप्त किया ऐसे इतिहासविद् मानते हैं।

(यूक्लिदेनापि सुवहोः कालानन्तरमपि लम्बपातने कस्याश्चित् सरलरेखायाः तुल्ये विभागे वा कर्तव्ये यथायथमस्यैव प्रकारस्यानुसरणं कृतं वेदितव्यम्। बौ.शु.सू.भूमिका.विभूतिभूषण भट्टाचार्य)

• वृत्त की दो जीवाओं के लम्ब समद्विभाजक वृत्त के केन्द्र पर प्रतिच्छेद करते हैं।

समचतुरस्र को त्रिभुज वनाने की विधि

वर्ग क्षेत्र के बराबर क्षेत्रफल वाला, त्रिभुज वनाने के लिये आचार्यने कहा है कि –

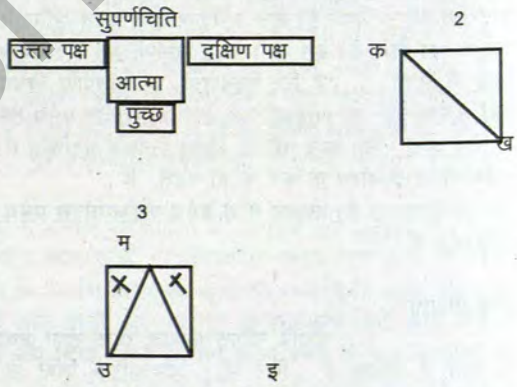
समचतुरस्रं प्रउगं चिकीर्षन् यावच्चिकीर्षेद्विस्तावतीं भूमिं समचतुरस्रां कृत्वा पूर्वस्याः करण्या मध्ये शङ्कुर्निहन्यात्। तस्मिन् पाशौ प्रतिमुच्य दक्षिणोत्तरयोः श्रोण्योर्निपातयेत्। बहिः स्पन्द्यमपच्छिन्द्यात्।। (बौ.शु.सू.1/45)

अर्थ– वर्गक्षेत्र को त्रिभुज वनाने के लिये, जितना बडा वर्गक्षेत्र के बराबर त्रिभुज वनाना हो उस से दुगुना बडा वर्गक्षेत्र वना कर, पूर्वस्थित तिर्यङ्मानी के मध्य में एक शंकु गाड दे। मध्य शंकु से दक्षिण तथा उत्तर श्रोणी (पश्चिम तिर्यङ्मानी के दक्षिण तथा उत्तर कोना)

तक रस्सी फैलावे। निष्पन्न त्रिभुज के बाहरी दोनों भाग का परित्याग कर दे। मध्यस्थ त्रिभुज अभीष्ट वर्ग क्षेत्र के समान क्षेत्रफल वाला त्रिभुज होगा। (उदाहरण अग्रिम सूत्र कीउपपत्ति के साथ है।) पूर्व सूत्र में आचार्य बौधायनने एक समचतुरस्र को त्रिभुज में परिवर्तित करने का उपाय को वताया गया । चयन याग में सपक्षपुच्छ विषेश अग्निक्षेत्र को समचतुस्र में सम्पादन कर, उस को फिर प्रउग (त्रिभुज) में परिवर्तित करने के लिये पूर्वसूत्र में नियम वताया गया। अव त्रिभुज के क्षेत्रफल को ठीक दो गुना करने के लिये उस विधि को दूसरे शब्दों से आचार्य कात्यायन प्रतिपादन करते हैं–

त्रिभुज को द्विगुणित करना प्रउगे यावानग्निः सपक्षपुच्छविषेशस्तावद्द्विगुणं समचतुरस्रं कृत्वा यः पुर स्तात् करणी मध्येशंकुर्यौ च श्रोण्योःसोऽग्निः।। (का.शु.सू.4/5)

अर्थ– त्रिभुज में जितना वडा क्षेत्र समाहित है उस को द्विगुणित करने के लिये, पहले त्रिभुज को समचतुरस्र में सम्पादित कर, समचतुरस्र को फिर द्विगुणित कर पूर्व करणी (रेखा) के मध्यबिन्दु से पश्चिम रेखा के दोनो छोर तक रेखा खींचने से अभीष्ट समच तुरस्र के क्षेत्रफल के बरावर त्रिभुज निष्पन्न होता है।



यहां विभन्न प्रमाणवाले क्षेत्रों में वना हुआ पक्ष पुच्छ आत्मा वाला सुपर्ण चिति को नानाप्रमाण समास से

2 चित्र में एकत्र किया गया। द्वितीय चित्रके वर्गक्षेत्र के बराबर क्षेत्रफल वाला त्रिभुज वनाने के लिये उसके क ख कर्ण रेखा से द्वितीय चित्र के द्विगुणित वर्गक्षेत्र को तृतीय चित्र में वनाया गया। शीर्ष मध्यबिन्दु से दोनो कोने के ओर लम्बपात करने से निष्पन्न उ म इ त्रिभुज द्वितीय चित्र के वर्गक्षेत्रफल के बराबर होगा।

निष्कर्ष–

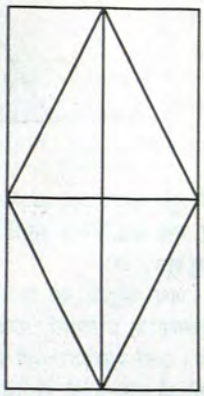
किसी भी वर्गक्षेत्र के क्षेत्रफल के बराबर, त्रिभुज वनाने के लिये, वर्गक्षेत्र को द्विगुणित कर शीर्ष रेखा के मध्यभाग से सम्मुखस्थ दोनो कोण तक लम्बपात करने से निष्पन्न त्रिभुज अभीष्ट वर्गक्षेत्र के बराबर क्षेत्रफलवाला त्रिभुज होता है।

दोनो तरफ त्रिभुज वनाना उभयतः प्रउगे तावदेव दीर्घचतुरस्रं कृत्वा करणी मध्येषु शंकवः स समाधिः।।

(का.शु.सू.4/6)

अर्थ–दोतरफा त्रिभुज वनाने के लिये (दो वर्गक्षेत्र को संलग्न स्थापित कर) उतना वडा दीर्घचतुरस्र वनाकर करणी के मध्यभागों में कीलों को गाड कर रेखा खींच कर जोड दें।

Vijnana Bharati



यहां दो वर्गक्षेत्रों को ऊपर नीचे कर स्थापित किया गया है। जिस से समान प्रमाण वाला दो त्रिभुज वने।

निष्कर्ष–

एक आधार पर वनाये गये दो वर्गक्षेत्रों के पूर्व एवं पश्चिम रेखा के मध्यबिन्दु से सम्मुख कोण तक रेखा विन्यास करने से वर्गक्षेत्र के अर्धक्षेत्रफल वाला दो त्रिभुज निष्पन्न होता है।

त्रिभुज को चतुर्भुज वनाना प्रउगं चतुरस्रं चिकीर्षन् मध्ये प्रा०चमपच्छिद्य विपर्यस्येतरत उपाधाय दीर्घचतुरस्र समासेन समस्येत् स समाधिः।। (का.शु.सू.4/7)

अर्थ–त्रिभुज को चतुरस्र करने के लिये पूर्वस्थ शीर्ष बिन्दु से पश्चिमस्थ आधार रेखा तक लम्ब पात कर के, त्रिभुज को समद्विभाजित करें। किसी एक त्रिभुज को उलाट कर साथ में ही जोड कर स्थापित करने से एक दीर्घचतुरस्र निष्पन्न होता है।

आधुनिक प्रमेय

उपर्युक्त सूत्रों से प्रतिपादित विहरण प्रक्रियाओं में रचना सम्बन्धी जो सिद्धान्त झलकते हैं उनको आधुनिक विचारकोंने इस प्रकार प्रतिपादन किया है। –

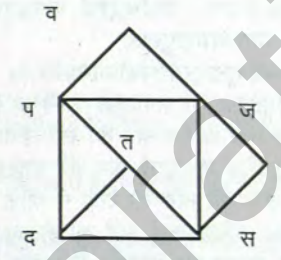
- यदि दो भुज के संगत कोण बरावर हों अर्थात् दो समकोणिक हों तो त्रिभुज समकोणिक होते हैं। (कक्षा 7 भा.2 पृ.सं.308 दिल्ली.शि.वि.)
- किसी त्रिभुज का क्षेत्र फल उस समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है जिस का आधार और शीर्षलम्ब क्रमशः त्रिभुज के आधार और शीर्षलम्ब के बरावर हो।

(कक्षा 7 भा.2 पृ.सं.338 दिल्ली.शि.वि.)

- यदि किसी त्रिभुज के दो भुजायें बरावर हों तो उन भुजाओं के सम्मुख कोण भी बरावर होते हैं। (कक्षा 7 भा. 2 पृ.सं.244 दिल्ली.शि.वि.)
- किसी समद्विबाहु त्रिभुज में बरावर भुजाओं के सम्मुख कोण बरावर होते हैं। (कक्षा 7 भा.2 पृ.सं.245 दिल्ली.शि.वि.)
- किसी त्रिभुज का शीर्षलम्बों के संगमन बिन्दु को त्रिभुज का लम्बकेन्द्र कहते हैं। (कक्षा 7 भा.2 पृ.सं.263 दिल्ली.शि.वि.)
- यदि त्रिभुज के दो कोण दूसरे त्रिभुज के दो कोण क्रमशः बरावर हों तो ये दो त्रिभुज समरूप होते हैं। (कक्षा 10पृ.सं. 128 दिल्ली.शि.वि.)
- किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्यविन्दुओं को मिलाने वाला रेखा खण्ड तीसरा भुजा के समान्तर होता है।(कक्षा 10पृ.सं. 212. दिल्ली.शि.वि.)

वर्गक्षेत्र को दीर्घचतुरस्र वनाना समचतुरस्रं दीर्घचतुरस्रं चिकीर्षन् मध्येऽक्ष्णयाऽपच्छिद्य विभज्येतरत्पुरस्तादुत्तरत श्चोपदध्यात्।। (का.शु.सू.3/4)

अर्थ–समचतुरस्र को दीर्घचतुरस्र वनाने के लिये कर्ण रेखा से छेद कर (निष्पन्न दो त्रिभुज में से) एक को पुनः समभ्रग कर, एक भाग को पूर्वतरफ एवं दूसरे को दक्षिण रफ स्थापित करे। इस से वर्ग क्षेत्र के बरावर क्षेत्रफलवाला दीर्घचतुरस्र निष्पन्न होगा।

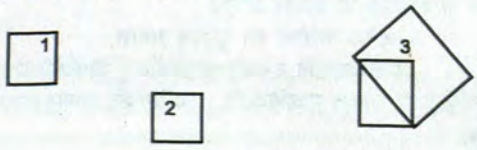


यहाँ द प ज स वर्गक्षेत्र है। प स उस के कर्ण है। रेखा से प स कर्ण को सम द्विभाग किया। जिस से द प त , द त स ,दो त्रिभुज उत्पन्न हुए। त ल द प त को वर्गक्षेत्र के पूर्वतरफ प व ज के रूप में स्थापित किया, तथा द त स को ज ल स के रूप में। द स इस से प व ल स एक आयतक्षेत्र वना जो कि द प ज स वर्ग क्षेत्र के बरावर क्षेत्रफल वाला है।

क्षेत्र समास (वडे क्षेत्र में छोटे क्षेत्र को मिलाना)

नानाप्रमाणसमासे ह्सीयसः करण्या वर्षीयसोऽपच्छिन्द्यात्तस्याक्ष्णया रज्जुरुभेसम स्यतीति समासः।। (का.शु.सू.2/23)

अर्थ– विभिन्न प्रमाणक वर्ग क्षेत्रों को एकत्र करने के लिये छोटा वर्गक्षेत्र के करणी से वडा वर्गक्षेत्र के करणी को नाप कर चिन्हित करे। शीर्षकोण से कर्ण रेखा द्वारा चिन्हित स्थान को जोडें। जोडनेवाली वह कर्ण रस्सी छोटा और वडा दोंनों क्षेत्रों के समिष्ट क्षेत्र फल प्रतिपादक है। **इस विधि को शुल्ब शास्त्र में नानाप्रमाण समास विधि कहते हैं।**



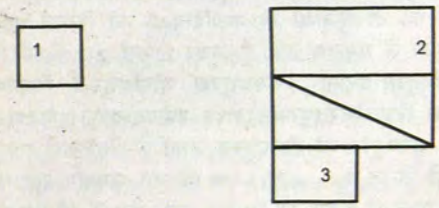
यहाँ 1छोटा वर्गक्षेत्र को 2 बडा क्षेत्र में मिलाना है। इस लिए 2 बडा क्षेत्र को पृथक् लिख कर छोटा क्षेत्र के प्रमाण को बडा वर्गक्षेत्र के नीचे तिर्यङ्मानी पर फैलाकर जहाँ स्पर्श किया, ऊपर से कर्ण रेखा से जोडा। कर्ण रेखा से वना 3 वर्गक्षेत्र में 1 क्षेत्रफल समाविष्ट है।

क्षेत्र व्यास (वडे क्षेत्र से छोटे क्षेत्र को निकालना)

चतुरस्राच्चतुरस्रं निर्जिहीर्षन् यावन्निर्जिहीर्षेत् तावदुभयतो ऽपच्छिद्य शंकूनिखाय पार्श्वमानीं कृत्वा पार्श्वमानीसम्मितामक्ष्ण्यां तत्रोपसंहरति समासेऽपच्छेदः सा कर ण्येषनिर्हासः।। (का.शु.सू.3/1)

अर्थ–वडे चतुरस्र से छोटे चतुरस्र को निकालने के लिये जितना वडा क्षेत्र को निकालना हो उतना वडा प्रमाण लेकर वडे क्षेत्र के (क्रमशः दोनो) पार्श्वमानी पर रख कर चिन्हित करे एवं चिन्हित दोनो पार्श्वमानी को रेखा से जोड दें। वडे चतुरस्र करणी को कर्ण रूप में एक कोने से नीचे तिर्यङ्मानी तक फैलावे। तिर्यङ्मानी पर चिन्हित वडा भाग से जो क्षेत्र निर्माण होगा वह अभीष्ट छोटे क्षेत्र के क्षेत्रफल से रहित होगा।

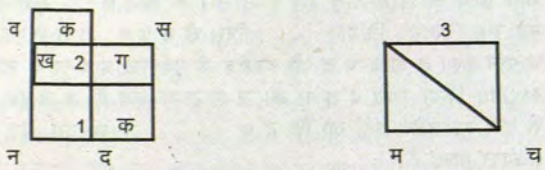
Vijnana Bharati



1वर्गक्षेत्र को 2वर्ग से हटाना है। जो तृतीय क्षेत्र में निष्पन्न हो ता है।

र्घचतुरस्र को समचतुरस्र वनाना दीर्घचतुरसं समचतुरसं चिकीर्षन् मध्ये तिर्यगपच्छिद्यान्यतरद् विभज्येतरत्पुरस्ता क्षिणतश्चोपदध्याच्छेषमागन्तुनापूरयेत्तस्योक्तनिर्हासः।। (का.शु.सू3/2)

अर्थ– दीर्घचतुरस्र को समचतुस्र करने के लिये दीर्घचतुरस्र के मध्य में समभाग कर के फिर द्वितीय भाग को सम द्विभाग कर के, एक भाग को साथ में सटा हुआ छोड कर दूसरे भाग को चतुरस्र के दक्षिण भाग में संलग्न स्थापित करे। कोने की भाग को रेखा से जोड कर एक समचतुरस्र सम्पादन करे। समाविष्ट अधिक लघु भाग को क्षेत्रव्यासविधि ा से निकाल देने से अभीष्ट आयताकार क्षेत्रफल के समान एक वर्गक्षेत्र निष्पन्न होता है। जैसे नीचे चित्र में दिया गया है।



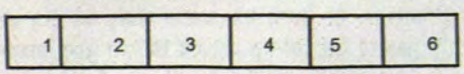
यहाँ न व स द आयता कार क्षेत्र को वर्गक्षेत्र मेंपरि वर्तन करना है। इस लिए आयतक्षेत्र को समद्विभाग किया, जिस से 1,2, वर्गक्षे वने। 2 वर्गक्षेत्र को पुनः क ख रूप में समभाग किया। ख भाग को 1वर्गक्षेत्र के साथ सटाहुआ रखा, एवं क भाग को 1 के दक्षिण तरफ स्थापित किया। क ख भाग के बाह्यरेखा को बढा कर जोडा, जिस से ग लघुवर्गक्षेत्र वना। इस अधिक भाग को निकालने के लिए 3 चित्र में क्षेत्र व्यास पद्धति को अपनाया गया। 3चित्र के म च प्रमाण से जो वर्गक्षेत्र वनेगा, वह आयत क्षेत्र के क्षेत्रफल के बराबर होगा।

अनेक वर्गक्षेत्रों का युगपत् समास

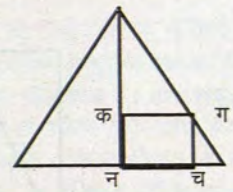
यावत्प्रमाणानि समचतुरस्राण्येकीकर्तुं चिकीर्षेदेकोनानि तानि भवन्ति, तिर्यग्द्विगु णा न्येकत एकाधिकानि, यस्मिर्भवति तस्येषुस्तत्करोति।। (का.शु.सू.6/7)

अर्थ–जितने वर्गक्षेत्रों को एक साथ एकत्रित करना हो, एक कम कर एक पंक्ति में उनको रखें। उनके आधार रेखा जितनी लम्बी हुई उसको दो गुना कर पृथक् एक स्थान पर फैला वे। अभीष्ट वर्गक्षेत्रों के संख्या से एक अधिक जोड कर वर्गक्षेत्रों की आधार लम्बाई को द्विगुणित कर जहां फैलाये हैं, उस रेखा के दोनो प्रन्तों से ऊपर के ओर उस प्रकर फैलावे जिस से एक त्रिभुज की निष्पत्ति हो। त्रिभुज के शीर्षबिन्दु से आधार रेखा पर लम्बपात करने से त्रिभुज समद्विभाजित हो जाता है। शीर्ष लम्ब के अर्धप्रमाण से निर्मित वर्गक्षेत्र में अभीष्ट लघु वर्गक्षेत्रों का क्षेत्रफल समाहित होजाता है।

यहाँ 6 लघु वर्गक्षेत्रों को एक समचतुरस्र में सम्पादन करना है। विहरण विधि से



वनाये गये क ग च न समचतुरस्र के अन्दर छे वर्गक्षेत्र समाविष्ट हो जायेगें।

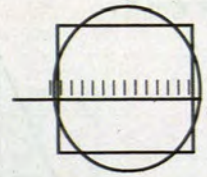


चतुरस्र को वृत्त वनाना चतुरस्रं मण्डलं चिकीर्षन् मध्यादंशे निपात्य पार्श्वतः परिलिख्य तत्र यदतिरिक्तं भवति तस्यतृतीयेन सहमण्डलं परिलिखेत् स समाद्रि ाः।। (का.शु.सू.3/13)

अर्थ–चतुरस्र को मण्डल वनाने के लिये कर्णरेखा से उसके मध्यबिन्दु निकालकर, प्रमाणार्ध रस्सी को केन्द्रबिन्दु से किसी एक कर्ण रेखा पर फैलावे। जहाँ स्पर्शकरे वहाँ चिन्ह देकर शेष भाग को तीन भाग करे। वर्गक्षेत्र की केन्द्रबिन्दु से तृतीय भाग के प्रारम्भ चिन्ह के साथ जो वृत्त वनेगा वह चतुरस्र क्षेत्रफल के बरावर क्षेत्रफलवाला वृत्त होगा।

वृत्त को चतुरस्र वनानामण्डलं चतुरस्रं चिकीर्षन् विष्कम्मं प०चदशभागान् कृत्वा द्वावुद्धरेच्छेषः करणी।।
(का.शु.सू.3/14)

मण्डल को चतुरस्र वनाने केलिए मण्डल के मध्य में रेखा खींच कर, उस को 15भाग करे। दो भाग को छोड कर शेष 13 भाग के प्रमाण से चतुरस्र निर्माण करने पर वृत्त के रावर क्षेत्रफलवाला समचतुरस्र वनेगा है।



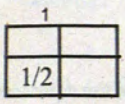
विशेष–वृत्त को चतुरस्र एवं चतुरस्र को वृत्त वनाने की जो विधि आचार्योंने वताया है, उसेअधुनातन विचारक आसन्न क्षेत्रफल मानते हैं। आसन्न हाते हुए इसे पूर्ण मानना चाहिए। क्यों कि अंकगणित में भी जव 20 को 3 से भाग दिया जाता है तो विभाजन फल 6.666666666.. में ही आता है, और इस को शुद्धरूप में ही ग्रहण किया जाता है।इस प्रकार वृत्त और चतुस्र विधान को भी मानना चाहिए। पदवर्ग पद्धति

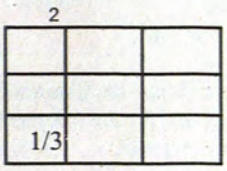
आचार्यने "यावत्प्रमाणारज्जुर्भवति तावन्तस्तावन्तो वर्गा भवन्ति तान् समस्येत्। (का.शु.सू3/7) अर्थात् –जितनी बडी रस्सी होगी उतना बडा क्षेत्र वनेगा। इस से (2 2=4)वर्गफल लाने की विधि सुस्पष्ट है। सम्पूर्ण प्रमाण से रचनाविधि कहने के वाद, अव पादभेद से वर्गस्वरूप की चर्चा करते हैं।

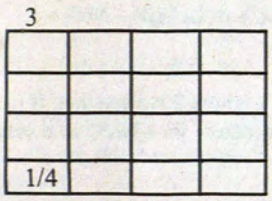
अर्धप्रमाणेन पादप्रमाणं विधीयते, तृतीयेन नवमोऽशः , चतुर्थेन षोडशीकला ।। (का.शु.सू.3/8–10)

अर्थ–प्रमाण के आधा भाग से रचना करने पर,सम्पूर्णप्रमाण से वना वर्गक्षेत्र का चतुर्थांश होता है 1। तृतीय भाग से करने पर नौंवा भाग 2, चौथे भाग से करने पर सम्पूर्ण वर्गक्षेत्र का सोलहवाँ भाग निष्पन्न होता है 3।

Vijnana Bharati







यह प्रक्रिया अधिकतर इष्टकाओं के निर्माण के समय प्रयोग में लाया जाता है। रेखा गणित के साथ अंक गणित का भी पदवर्ग पद्धति इस में दिखाई पडता है। इस प्रकार अन्य सभी सूत्रों पर चर्चा मूलग्रन्थ कात्यायन शुल्बसूत्र में विस्तृत व्याख्या एवं उपपत्ति के साथ किया हूँ। मूलग्रन्थ की व्याख्या संस्कृत में होने से अध्योताओं के जिज्ञासा को देखते हुए हिन्दीभाषा में शुल्बसूत्र की मूलभूत सिद्धान्तों को एकलघुशोध निबन्ध में प्रतिपादन करने का छोटासा प्रयास किया हूँ। आशा है कि–सुधीजन पढकर समुचित सुझाव से मेरा उत्साह सम्बर्धन करेंगे।

Vijnana Bharati